

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA**

MESTRADO PROFISSIONAL

GUIA DIDÁTICO

**UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA:
A RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA ENVOLVENDO
OPERAÇÕES COM O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS E A
CALCULADORA**



GABRIELE MOLON

LAURETE ZANOL SAUER

FRANCISCO CATELLI

Caro(a) Professor(a)

Na pesquisa que deu origem a este **Guia Didático**, estudou-se a possibilidade de promover aprendizagem significativa por meio da resolução de situações-problema envolvendo o Conjunto dos Números Reais, com o apoio da calculadora básica. Por meio dessa proposta, desenvolvida na forma de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa - UEPS (MOREIRA, 2011), fundamentada na Teoria da Aprendizagem Significativa, de Ausubel (2003), buscou-se promover o desenvolvimento do raciocínio lógico, da habilidade de encontrar e descrever padrões, da argumentação e da utilização correta da linguagem matemática. Os dados analisados têm origem em diversos instrumentos aplicados durante a sua realização, além das referidas situações-problema, tais como participações dos estudantes, avaliação diagnóstica e avaliação final, apresentando resultados expressivos, no que se refere à aprendizagem significativa do conteúdo abordado e da metodologia utilizada.

Especificamente, no que diz respeito à utilização da calculadora, quando houver interesse em utilizá-la em sala de aula, destaca-se a importância do professor refletir sobre seu planejamento e cotidiano docente.

Aqui você encontrará sugestões de atividades promovidas com este propósito.

Espera-se que sejam exitosas para você também!

Bom trabalho!

SUMÁRIO

Introdução: Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS)	4
Planejamento da UEPS "A resolução de situações-problema envolvendo operações com o Conjunto Números Reais e a calculadora"	6
Primeiro Momento: Avaliação Diagnóstica	8
Segundo Momento: Resolução de situações-problema considerando os conhecimentos prévios evidenciados na avaliação diagnóstica	14
Terceiro Momento: Breve exposição da professora seguida de atividade colaborativa	18
Quarto Momento: Retomada de aspectos significativos encontrados nos momentos anteriores	21
Quinto Momento: Continuidade de aplicações de situações-problema em níveis mais altos de complexidade	22
Sexto Momento: Resolução de situações-problema em forma de desafios	26
Sétimo Momento: Avaliação final	30
Referências utilizadas neste Guia	35

Introdução: Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS)

Com base na Teoria da Aprendizagem Significativa, Ausubel (2003) explica que, para aprender significativamente, o estudante deve manifestar predisposição para aprender. O autor considera também que, apesar da evidente preocupação da maioria dos professores com a aprendizagem dos estudantes, é necessário que se esteja embasado e preocupado com propostas pedagógicas inovadoras, que auxiliem a construção do conhecimento dos estudantes. Sabe-se que elaborar propostas pedagógicas inovadoras se torna um trabalho árduo, porém recompensador no seu término, caso sejam observadas condições importantes para a ocorrência de aprendizagem significativa. Para Ausubel, tais condições, além da **pré-disposição do estudante para aprender**, devem levar em conta seus **conhecimentos prévios**, nos quais seja possível ancorar novos conhecimentos. Estes são chamados **subsunoços**, conceito(s) ou ideia(s), já existente(s) na estrutura cognitiva, capazes de servirem como "ancoradouro" a uma nova informação, de modo que esta adquira, assim, significado para o sujeito. Além disso, Ausubel sugere os **organizadores prévios** que, entende-se, como atividades a serem planejadas e propostas com base nos subsunoços identificados.

Moreira e Masini (2006) também ressaltam que, para que a aprendizagem seja significativa, o **material deve ser potencialmente significativo**; é fazer sentido para o estudante e estabelecer uma relação do que já se sabe com o novo conhecimento.

Um exemplo de material potencialmente significativo é uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS). Segundo Moreira (2011), as **UEPS** são sequências de ensino fundamentadas teoricamente, voltadas para a aprendizagem significativa, não mecânica, que podem estimular a pesquisa aplicada em ensino, aquela voltada diretamente à sala de aula.

Assim sendo, elaboradas em níveis crescentes de dificuldade, as atividades que compõem uma UEPS buscam mobilizar e desafiar os estudantes, de forma que o conhecimento prévio se constitui como elemento fundamental em seu desenvolvimento, uma vez que são baseadas em atividades que buscam não somente o levantamento desses

conhecimentos, como também o confronto frente ao novo conceito, à reflexão e à discussão mediada pelo professor.

Assim entendidas, pode-se dizer que as UEPS nada mais são que unidades facilitadoras da aprendizagem significativa de tópicos específicos.

Para tanto, observaram-se alguns aspectos sequenciais na construção de uma UEPS, conforme sugere (MOREIRA, 2011; adaptado):

1. definição do tópico específico;
2. criação e proposta de situações em que o estudante possa expressar seu conhecimento prévio;
3. proposição de situações-problema em nível introdutório;
4. apresentação de aspectos gerais do conhecimento a ser ensinado (diferenciação progressiva) começando com aspectos mais gerais, com uma visão geral do todo, do que é mais importante na unidade de ensino;
5. retomada dos aspectos mais gerais e estruturantes em uma nova apresentação, em nível mais alto de complexidade;
6. visando à conclusão da unidade, retomada das características mais relevantes do conteúdo em questão, sob uma perspectiva integradora, em níveis mais altos de complexidade (reconciliação integrativa);
7. avaliação da aprendizagem;
8. avaliação da UEPS.

Com tais orientações, buscando uma aprendizagem significativa, optou-se pela elaboração de uma UEPS, cujo planejamento é descrito na próxima seção, como uma alternativa ao método tradicional de ensino das operações, envolvendo o Conjunto dos Números Reais, através de situações-problema, utilizando a calculadora.

Planejamento da UEPS

“A resolução de situações-problema envolvendo operações com o Conjunto dos Números Reais e a calculadora”

Concomitantemente à realização de estudos e análises de relatos de pesquisadores, com preocupações relacionadas à aprendizagem de Matemática, na educação básica, buscou-se responder à questão de pesquisa: **De que forma a utilização da calculadora pode contribuir para uma Aprendizagem Significativa das operações no Conjunto dos Números Reais, por meio da resolução de problemas, a partir de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS)?**

Para tanto, optou-se pela elaboração da UEPS “A resolução de situações-problema envolvendo operações com o Conjunto dos Números Reais e a calculadora”, com o objetivo de **promover a Aprendizagem Significativa por meio de uma UEPS que aborde situações-problema do cotidiano sobre as operações básicas realizadas no Conjunto dos Números Reais com a utilização da calculadora.**

Dessa forma, foi necessário:

- identificar conhecimentos prévios e dificuldades dos estudantes sobre operações com o Conjunto dos Números Reais;
- selecionar problemas envolvendo operações com o Conjunto dos Números Reais, cuja resolução, usando a calculadora, seja produtiva;
- elaborar e aplicar a UEPS com uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental;
- analisar a UEPS buscando indícios da ocorrência de Aprendizagem Significativa por parte dos estudantes participantes.

Assim sendo, quanto ao **planejamento** da UEPS, tem-se a convicção de que, quanto mais o professor estudar, quanto melhor preparar as aulas e colocá-las em conformidade com a predisposição e os subsunçores dos estudantes, mais facilmente acompanhará os conceitos assimilados; provocará mais respostas e perguntas; será mais fácil para o estudante aprender. (VASCONCELLOS, 2001). Dessa forma, o ato de planejar é de grande importância para que as aulas ocorram de forma dinâmica, com o objetivo de que o estudante participe de sua aprendizagem, tornando-se um sujeito crítico e ativo. Para tanto, estabeleceu-se, como objetivo geral desta UEPS, o desenvolvimento da capacidade do estudante de identificar oportunidades de utilização dos conceitos de Matemática, para resolver e analisar resoluções de situações-problema, utilizando a calculadora, de forma consciente, quando necessário.

Com base nesse planejamento, foram definidos os demais aspectos sequenciais, ou passos da UEPS, aqui chamados momentos, sendo o último, a avaliação.

Como resultado, elaborou-se este **Guia Didático**, que apresenta os referidos momentos, nas próximas seções.

Primeiro Momento: Avaliação Diagnóstica

Objetivo: identificar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre operações no Conjunto dos Números Reais, na resolução de situações-problema, com a utilização da calculadora.

Tempo:duas horas-aula (1h40min)

Atividade:resolução de dez situações-problema

Dinâmica: os estudantes são orientados a propor soluções, individualmente, com o auxílio da calculadora, registrando sempre como pensaram, a fim de chegar a cada uma das respostas.

Comentários com sugestões para este momento:

- Antes de iniciar as atividades, neste encontro, sugere-se que a UEPS seja apresentada aos estudantes: seus objetivos, a forma como será realizada e avaliada, bem como o tempo de duração da mesma.
- No caso aqui apresentado, deve ser ressaltada a importância da utilização da calculadora, no decorrer das atividades, sempre que necessário. É importante destacar que para alguns estudantes esta proposta didático-pedagógica será bem aceita; porém, outros poderão ter dificuldades em compreender seu real significado, motivo pelo qual sugere-se que esta explicação seja a mais detalhada e clara possível.
- Sugere-se, aqui, duas possibilidades de aplicação da UEPS: (i) de forma contínua, como uma unidade do programa da disciplina; ou (ii) no mesmo dia da semana, em datas contínuas e, assim, podendo dar andamento aos demais assuntos programados na disciplina.
- Para a realização da atividade destinada ao **primeiro momento**, sugere-se que a turma seja organizada da mesma maneira que para as avaliações: sem consulta ao material, aos colegas e ao professor(a).
- Sugere-se, também, anotar, fotografar, enfim, registrar de alguma forma todas as situações relevantes que os estudantes demonstraram ao longo desta atividade. Isso ajudará na identificação de conhecimentos prévios, recomendada para este momento.

**ATIVIDADES PROPOSTAS PARA O PRIMEIRO MOMENTO DA UEPS:
AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA**

Resolva os seguintes problemas envolvendo o Conjunto dos Números Reais. O objetivo desta atividade, além de verificar o seu grau de compreensão deste conteúdo, é colaborar para que o mesmo seja desenvolvido, entendendo que, para a resolução dos problemas propostos, você procurará utilizar seus conhecimentos prévios.

Tais problemas devem ser resolvidos com a utilização da calculadora. É importante que você procure explicar como pensou, ao resolver cada um dos problemas.

Situações-problema propostas:

1) Atividade física e a procura por qualidade de vida

Uma pessoa refletindo sobre sua qualidade de vida, bem como sobre sua saúde, chegou à conclusão de que deveria procurar uma academia para se exercitar. Realizou um levantamento de preços, em duas academias:

- ✓ a primeira academia que procurou cobra uma taxa fixa de R\$ 110,00 e uma mensalidade de R\$ 55,00.
- ✓ a segunda academia cobra uma taxa fixa de R\$ 90,00 e uma mensalidade de R\$ 60,00.

Determine:

- a) os valores cobrados em cada uma das academias, se a pessoa realizar atividade física durante cinco meses.
- b) qual a academia mais barata se a pessoa realizar atividade física durante um ano?

2) Uma menina foi a uma livraria onde gastou R\$ 51,00 e pagou com uma nota de R\$100,00. O vendedor dispunha apenas de notas de R\$ 20,00 e R\$ 10,00 e dois sabores de balas que custavam: R\$ 2,00, a de morango e R\$ 1,50, a de chocolate. A menina aceitou receber parte de seu troco em balas, nos dois sabores, recebendo assim cinco balas. Determine a quantidade de balas de cada sabor que ela recebeu como troco.

3) Tendo como base os estudos realizados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

(IBGE), no ano de 2010 a população da cidade de Caxias do Sul era de 435.564 habitantes e sua estimativa para o ano de 2014 era de 470.223 habitantes.

- a) Calcule o aumento estimado do número de habitantes entre os anos de 2010 a 2014.
- b) Se o aumento anual da população de Caxias do Sul fosse sempre o mesmo, qual seria a quantidade de habitantes em 2015?

4) A prática esportiva é cada vez mais valorizada, não apenas por ser saudável, mas, também, por ajudar no relacionamento com as demais pessoas, o que é possível observar na frase de Gustavo Borges, grande nadador brasileiro ao afirmar:

A prática esportiva também ajuda num mundo melhor com tudo de bom que traz para nós: saúde, autoestima, espírito de equipe, entre outros atributos que com certeza, vêm junto com o esporte.

Com essa visão, uma turma de 48 estudantes de uma escola resolveu que todos iriam praticar algum esporte com a seguinte distribuição: $\frac{1}{4}$ optou pelo futebol, $\frac{1}{6}$ escolheu o handebol e o restante da turma faz natação.

- a) Que fração representa a quantidade de estudantes que escolheu futebol e handebol?
- b) Qual a quantidade de estudantes que praticam cada esporte?

5) Uma casa lotérica, nos últimos dias, está atendendo um número maior de pessoas, o que se deve ao fato de estarmos próximos do final do ano e, com isso, muitas pessoas arriscarem sua sorte em jogos lotéricos, na esperança de melhorar financeiramente. Com tamanha demanda, a casa lotérica se encontra sem troco. A dona da lotérica precisa trocar R\$ 2.000,00 o mais rapidamente possível.

- a) Cite quatro possibilidades de trocas se, naquele momento, o banco tiver à disposição moedas, em número suficiente, de R\$ 0,05, R\$ 0,25, R\$ 0,50 e R\$ 1,00.
- b) Determine o número máximo e o número mínimo de moedas utilizadas, se o banco tiver moedas, em número suficiente, de R\$ 0,01, R\$ 0,05, R\$ 0,10, R\$ 0,25, R\$ 0,50 e R\$ 1,00.
- c) Determine uma possibilidade envolvendo todas as moedas existentes no banco, conforme o item (b).

6) Em uma cidade operam duas empresas de táxis. A empresa A cobra R\$ 12,00 pela bandeirada inicial e R\$ 4,00 por quilômetro rodado. A empresa B cobra, apenas por quilômetro rodado, o valor de R\$10,00. Determine o valor a ser pago por um passageiro, se percorrer 14 km utilizando a empresa A? E se utilizar a empresa B?

7) Utilize a calculadora para realizar as seguintes multiplicações por 11:

Observe que há um padrão nos resultados.

$$\begin{aligned} & \checkmark 13 \times 11 = \\ & \checkmark 24 \times 11 = \\ & \checkmark 35 \times 11 = \\ & \checkmark 46 \times 11 = \\ & \checkmark 57 \times 11 = \end{aligned}$$

a) Descreva o padrão observado.

b) Explique o padrão, com base em seus conhecimentos sobre a multiplicação.

8) Digite em sua calculadora $3 + 4$. Em seguida, tecele no sinal de igual (=) várias vezes.

a) Anote os 10 primeiros números que vão aparecendo na tela.

b) Descreva os cálculos efetuados pela calculadora.

9) Buscando melhorar o atendimento ao usuário do sistema de saúde de um município, a prefeitura realizou uma pesquisa de satisfação com 500 pacientes. As notas poderiam variar de 1 a 10, e os resultados da avaliação feita pelos pacientes são mostrados no quadro ao lado. Calcule a nota média dada pelos entrevistados.

Nota	Número de pacientes
1	05
2	15
3	40
4	128
5	150
6	90
7	35
8	25
9	10
10	02
<i>Total</i>	500

10) Sobre o número π

Ao longo da história da invenção e utilização dos números, como forma de expressão, interpretação e criação matemática, algumas situações despertavam a maior atenção dos matemáticos. Entre elas pode-se destacar a que envolve o número π .

Inúmeras foram as tentativas e os desafios enfrentados pelos matemáticos, de várias épocas, de diversos locais do planeta, na tentativa de descrever analiticamente as relações numéricas que envolviam e envolvem, até hoje, o número π . Esse número é comumente visto como a razão (divisão) entre a medida do comprimento da circunferência e a medida do seu diâmetro.

Os povos da Antiguidade (egípcios, chineses, babilônios e hindus) envolveram-se com esses problemas ligados à razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, chegando a resultados variados e polêmicos. Os judeus, por exemplo, aproximaram o resultado dessa razão ao número 3, ou seja, consideraram que o comprimento da circunferência era o triplo do seu diâmetro. Tal razão numérica foi efetivamente invalidada experimentalmente.

Fonte: MENDES, Iran Abreu. **Números: o simbólico e o racional na história.** São Paulo: Livraria da Física, 2006.

Uma famosa série, obtida por Leibniz, renomado matemático alemão, em 1674, consiste de um procedimento para aproximar o valor de π . Trata-se da expressão:

$$4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \right)$$

- Calcule o valor da expressão acima, com duas casas decimais.
- Agora calcule a mesma expressão, porém com mais parcelas, também com duas casas decimais.

$$4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \right).$$

Qual foi seu resultado?

Na análise dos resultados, sugere-se separar as respostas em corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco, conforme adaptação dos critérios apresentados em Cury (2016, apud PONTE et al., 1997). Dessa forma:

a resposta é correta (C) quando o aluno compreende a questão, mostra conhecer o conteúdo e usa estratégias adequadas para a solução; também é considerada correta a resposta em que é cometido apenas um erro de cálculo final ou um erro na cópia dos dados da questão, desde que as estratégias tenham sido bem escolhidas e implementadas.

a resposta é parcialmente correta (PC), quando há evidências de o aluno ter selecionado a estratégia adequada, mas sua implementação não está totalmente explicada; ou quando usa estratégias adequadas, desenvolvimento correto, mas chega a uma resposta final incorreta.

a resposta é incorreta (I), quando o aluno usa estratégia inadequada e chega a uma resposta incorreta; ou quando usa uma estratégia adequada, entretanto não a implementa corretamente e assim não chega a uma solução correta.

resposta em branco (EB) é quando o aluno, efetivamente, não apresenta resposta ou apenas copia os dados do enunciado, sem qualquer tentativa de solucionar.

Com base em tais critérios, foi elaborada uma tabela, com os percentuais de questões corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco na avaliação diagnóstica, a fim de identificar conhecimentos prévios e subsunçores, com base nos quais foi programado o segundo momento. As questões propostas para o segundo momento foram selecionadas, após a conclusão de que a maior dificuldade dos estudantes estava na resolução de questões envolvendo padrões.

Segundo Momento: Resolução de situações-problema considerando os conhecimentos prévios evidenciados na avaliação diagnóstica

Objetivo: considerando os conhecimentos prévios identificados, resolver novas situações-problema envolvendo padrões e sequências numéricas

Tempo: duas horas-aula (1h40min)

Atividade: resolução de seis situações-problema, envolvendo padrões e sequências numéricas

Dinâmica: os estudantes foram orientados a resolver em duplas, com o auxílio da calculadora, registrando sempre como pensaram, a fim de chegar à resposta.

Comentários com sugestões para este momento:

- Seguindo o planejamento, no segundo encontro as atividades precisam levar em consideração os conhecimentos prévios observados, o que deverá ser feito com base na análise das resoluções das questões propostas no primeiro momento.
- Com base nisso são propostas novas questões com o objetivo de que os estudantes possam observar, experimentar e propor hipóteses, como participantes ativos da própria aprendizagem.
- As novas questões, em nível bem introdutório, devem ser relacionadas às dificuldades observadas, tendo a função de servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele precisa saber, para que possa aprender significativamente, por meio da tarefa com que se depara.
- Esta pode ser proposta para ser resolvida em duplas, a fim de que possam debater sobre as questões apresentadas, também sem nenhuma intervenção do(a) professor (a).
- Novamente é sugerido o auxílio da calculadora quando necessário, apresentando todos os passos realizados para a obtenção das respostas, devendo entregá-las para análise do(a) professor(a).

ATIVIDADES PROPOSTAS PARA O SEGUNDO MOMENTO DA UEPS

Em duplas, resolvam os seguintes problemas envolvendo padrões ou sequências numéricas. O objetivo desta atividade é o de reconhecerem padrões em sequências geométricas e sequências que envolvam números. Tais problemas podem ser resolvidos com a utilização da calculadora. É importante que procurem explicar como pensaram, ao resolver cada um dos problemas.

1) Problema das conchinhas: (adaptado de Vale, 2012)

A menina do mar organizou as conchas que apanhou ontem na praia, do modo que a figura ao lado mostra. Descubra um processo rápido. Explique-o.

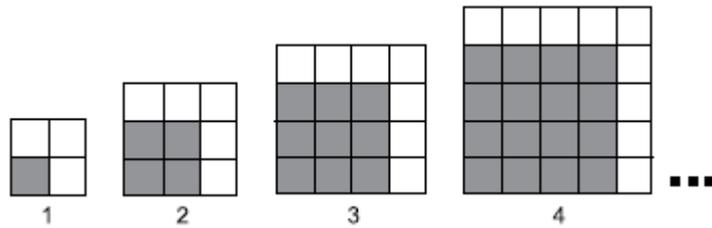


2) Observe o quadro (adaptado de Concurso Ministério Público/RS, 2012)

A	B
1	1000
2	500
4	250

Suponha que as linhas das colunas A e B prossigam sendo formadas pela mesma lógica usada até então, que é o dobro do elemento anterior para os elementos da coluna A, a partir do número 1 arbitrariamente escolhido, e a metade do elemento anterior para os elementos da coluna B, a partir do número 1000 arbitrariamente escolhido. Determine os elementos que pertencem à 13ª linha.

3) Cada figura da sequência é composta de quadradinhos escuros e de quadradinhos claros.
(adaptado de Concurso SP Urbanismo, 2014)



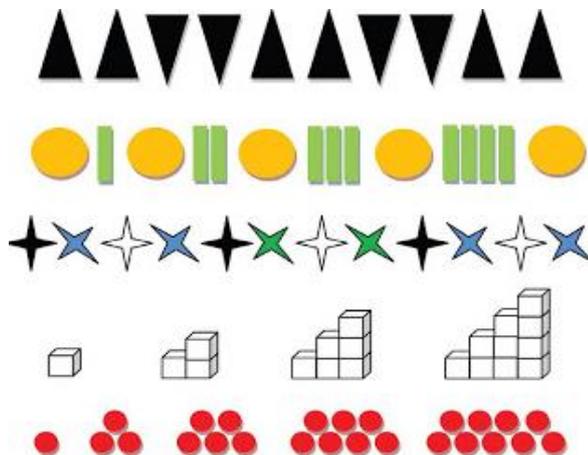
Admita que o padrão observado nessa sequência de quatro figuras se mantenha para as figuras seguintes. Assim, quantos quadradinhos brancos terá a figura que contém 169 quadradinhos escuros?

4) Observe a sequência de figuras desenhadas: (adaptado de Iezzi, 2005)



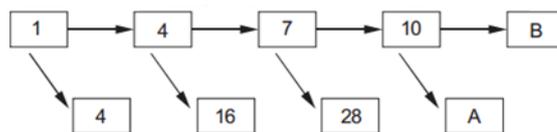
Procure entender a lógica dessa sequência e aponte qual será a 100ª figura.

5) Observe a cartela com formas geométricas e responda às questões: (adaptado de Iezzi, 2005)



- Observe a primeira linha da cartela. Você consegue perceber algum padrão entre os triângulos? Explique esse padrão.
- Agora analise a segunda linha. A distribuição das figuras é a mesma que na linha anterior? Qual o padrão que podemos perceber entre os círculos e os retângulos?
- Na terceira linha da cartela, você seria capaz de continuar a sequência de figuras geométricas? Tente continuar também as sequências de figuras geométricas da 4ª e 5ª linhas da cartela.

6) Observe o diagrama e seu padrão de organização. Determine o padrão e os valores de A e B. (adaptado de Concurso Sergipe Gás S.A., 2013)



Observou-se que a calculadora foi utilizada ocasionalmente, uma vez que todas as situações-problema requeriam interpretações que, naquele momento, receberam maior atenção dos estudantes. Isto pode ser entendido como um indício de conscientização, por parte dos estudantes, que já começam a compreender que a calculadora não poderá substituir os respectivos raciocínios lógicos. De fato, na análise das resoluções apresentadas pelas duplas, constatou-se o benefício dos organizadores prévios programados por meio das atividades envolvendo padrões, uma vez que as mesmas promoveram avanços, tanto em relação à conscientização sobre a calculadora, como um recurso que não substitui o raciocínio lógico, quanto em relação à generalização de padrões, como atividade com potencial para o seu desenvolvimento.

Terceiro Momento: Breve exposição oral da professora, seguida de atividade colaborativa

Objetivo: a partir das situações-problema trabalhadas anteriormente, serão retomados os aspectos mais gerais e específicos, levando em conta a diferenciação progressiva.

Tempo:duas horas-aula (1h40min)

Atividade: apresentação oral do(a) professor(a); resolução de duas situações-problema

Dinâmica: os estudantes são orientados a resolverem em trios, com o auxílio da calculadora, registrando sempre como pensaram, e após um grupo vai ao quadro resolver uma das questões para o grande grupo.

Comentários com sugestões para este momento:

- Neste encontro é recomendada breve exposição do(a) professor(a) sobre alguns conceitos gerais, necessários para o avanço das atividades.
- Esta exposição deve ser realizada, levando em consideração as dificuldades observadas e analisadas, nas atividades promovidas nos dois primeiros encontros, dando espaço para questionamentos dos estudantes, ou apresentados pelo(a) professor(a), procurando esclarecer e apresentar novos exemplos.
- É importante levar em conta a diferenciação progressiva, começando com aspectos mais gerais, dando uma visão inicial do todo, do que é mais significativo, mas logo a seguir exemplificando, abordando aspectos mais específicos.
- Após, propor uma sequência de duas situações-problema, para que os estudantes, em trios, possam debater, resolvendo-as de forma colaborativa.
- Cada uma delas pode ser projetada, com o auxílio do *datashow*, e lida para o grande grupo.
- Feito isso, a orientação é de que os grupos resolvam e, ao concluir, apresentem a resolução, bem como a explicação detalhada, adotada pelo grupo. A utilização da calculadora continua sendo sugerida, sempre que necessário.

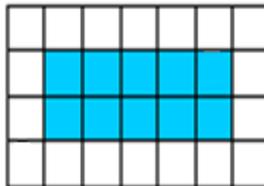
Moreira (2011) recomenda que no terceiro momento da UEPS sejam propostas situações-problema, em nível bem-introdutório, ainda levando em conta o conhecimento prévio dos estudantes, além de prepararem o terreno para a introdução do conhecimento a ser estudado. Assim sendo, foram propostas duas questões, adaptadas de Barbosa (2009), envolvendo padrões, mas com questionamentos que requerem, além da interpretação dos mesmos, a interpretação de uma situação-problema.

ATIVIDADES PROPOSTAS PARA O TERCEIRO MOMENTO DA UEPS

Em trios resolvam os seguintes problemas envolvendo as operações, no Conjunto dos Números Reais. O objetivo desta atividade é o de reconhecerem as operações envolvidas em cada tarefa. Tais problemas podem ser resolvidos com a utilização da calculadora. É importante que o trio explique seu raciocínio, ao resolver cada um dos problemas.

1) Piscinas (adaptado de Barbosa, 2009)

A empresa Queda d'Água constrói piscinas de fundo retangular. Na construção de cada piscina, são utilizados azulejos azuis para o fundo, e azulejos brancos para colocar na borda. A figura mostra uma piscina de dimensões 7 x 4 construída pela empresa Queda d'Água.



- Determine o número de azulejos de cada cor para uma piscina de dimensões 10 azulejos x 6 azulejos.
- Suponha agora que a empresa construiu uma piscina de dimensões 30 x 90; determine o número de azulejos necessários de cada cor.
- Imagine que a empresa dispõe de 361 azulejos azuis, para construir a piscina de um cliente. Sabendo que ele gostaria de uma piscina quadrangular, determine as dimensões máximas dessa piscina e o número de azulejos de cada tipo necessários à sua construção.

2) Sequência numérica. (adaptado de Barbosa, 2009)

Considere a seguinte distribuição numérica:

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13
17	18	19	20
...			

a) Continue a sequência por mais duas linhas.

b) Explique a regra que lhe permitiu continuar a sequência, nas últimas duas linhas.

c) Em que posição aparecerá o número 40 na sequência dada? E o número 81?

Na primeira atividade do terceiro momento, o objetivo é que os estudantes identifiquem, com base no desenho apresentado, a relação entre o comprimento e a largura de uma piscina, para, então, calcular o número de azulejos de cada cor, utilizados na respectiva construção. Esta questão permite relacionar conceitos geométricos e numéricos, podendo ser resolvida por contagem, dependendo de como os estudantes veem e interpretam o padrão, bem como por tentativa e erro.

Já para a segunda atividade, foi apresentada uma sequência numérica. Diferente da primeira, neste caso não há um componente visual. Para responder às perguntas, é necessário estudar a distribuição dos números, para tentar descobrir a posição de determinados números.

Durante a explanação dos trios, para o grande grupo, observou-se, em alguns casos, que os demais estudantes contribuíram para uma melhor explicação ou resolução da tarefa apresentada. Lembra-se da importância da mediação do professor, quando são promovidas atividades que desenvolvem a socialização de ideias. É preciso que os estudantes sintam-se à vontade e entendam suas intervenções como colaboradores, talvez mais para si mesmos, do que para os outros.

Durante a realização das atividades deste momento, foi percebida uma utilização menor da calculadora, uma vez que a maioria dos estudantes optou por resolver a questão completando todas as linhas. Mesmo assim, observou-se que a mesma foi utilizada, ocasionalmente.

Quarto Momento: Retomada de aspectos significativos encontrados nos momentos anteriores

Objetivo: sanar as dúvidas que tenham surgido ao longo dos encontros anteriores, promovendo a reconciliação integradora.

Tempo:duas horas-aula (1h40min)

Atividade: apresentação oral do(a) professor(a); analisar com os estudantes as dificuldades encontradas.

Dinâmica: com o auxílio de *slides*, repassar todas as situações-problema que os estudantes já trabalharam, procurando sanar dúvidas encontradas.

Comentários ou sugestões para este momento:

- Neste encontro, o objetivo principal é promover a reconciliação integradora, ou seja, retomar o assunto, porém em níveis mais altos de complexidade.
- Preparar uma apresentação em *powerpoint*, com o objetivo de retomar, com comentários, todas as atividades já trabalhadas nos encontros anteriores.
- Retomar as dúvidas ou dificuldades encontradas. Com o auxílio de *slides* o(a) professor(a) discute, juntamente com os estudantes, as situações-problema, os desafios ou as tarefas que já foram trabalhadas. Sempre que possível, apresentar novos exemplos que possam auxiliar na resolução, pelos próprios estudantes, das situações-problema abordadas.

Com base no planejamento da UEPS e levando em consideração observações registradas nos encontros realizados, procura-se promover uma retomada de todas as atividades já realizadas, através de uma apresentação em *powerpoint*, com os respectivos enunciados, visando ao esclarecimento de dúvidas dos interessados, além de conhecer aspectos relevantes para os estudantes. O(a) professor(a), como mediador(a), comenta cada uma das situações-problema, com os respectivos questionamentos e, ao mesmo tempo, levantando possibilidades de resolução que os estudantes apresentam. Observar a atenção e disposição dos mesmos, com relação à discussão promovida, apresentando dúvidas ou questionando sobre diferentes possibilidades de resolução.

Quinto Momento: Continuidade de aplicação de situações-problema em níveis mais altos de complexidade

Objetivo: a partir das situações-problema trabalhadas anteriormente, são retomados os aspectos mais gerais e específicos, levando em conta a reconciliação integradora.

Tempo:duas horas-aula (1h40min)

Atividade: resolução de três situações-problema

Dinâmica: os estudantes são orientados a resolverem em trios, com o auxílio da calculadora, registrando sempre como pensaram, e após um grupo vai ao quadro resolver uma das questões para o grande grupo.

Comentários com sugestões para este momento:

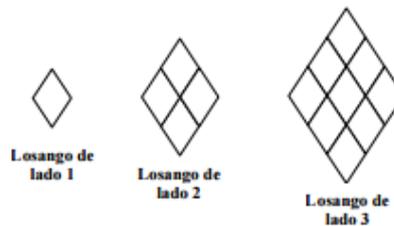
- Para o quinto encontro, dando continuidade à programação da UEPS, o(a) professor(a) planeja novas situações-problema, agora em nível mais alto de complexidade, em relação às situações anteriores.
- Esta atividade é proposta para ser realizada de forma colaborativa, em trios, e com a mediação do(a) professor(a).
- Ainda com a intenção de contemplar o princípio da reconciliação integradora, considerar como Ausubel (2003, p. 6): A reconciliação integradora tem a tarefa facilitada no ensino expositivo, se o(a) professor (a) e/ou os materiais de instrução anteciparem e contra-atacarem, explicitamente, as semelhanças e diferenças confusas entre novas ideias e ideias relevantes existentes e já estabelecidas nas estruturas cognitivas dos aprendizes.
- Neste encontro é proposto que, após a discussão e resolução pelos grupos, cada grupo apresente, no quadro, uma das questões, a fim de propiciar a análise e discussão com a turma.

ATIVIDADES PROPOSTAS PARA O QUINTO MOMENTO DA UEPS

Em trios, resolvam os seguintes problemas envolvendo as operações no Conjunto dos Números Reais. O objetivo desta atividade é o de reconhecer as operações envolvidas em cada tarefa. Tais problemas podem ser resolvidos com a utilização da calculadora. É importante que o trio explique seu raciocínio, ao resolver cada um dos problemas.

1) Sequência de losangos: (adaptado de Barbosa, 2009)

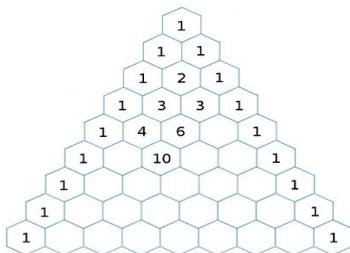
Considere a seguinte sequência de losangos:



Sabendo que são utilizadas peças de lado 1 (o mesmo que losangos de lado 1) na construção de qualquer losango da sequência, dada:

- Quantas peças são necessárias para construir um losango de lado 4? E de lado 50?
- Supondo que foram utilizadas 324 peças na construção de um dado losango da sequência, determine a medida do seu lado.

2) Triângulo de Pascal. (adaptado de Vale et al., 2007)

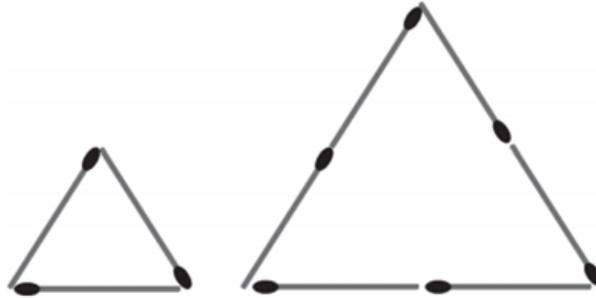


Observe a figura ao lado.

- Complete as linhas seguintes.
- Mencione alguma propriedade que caracterize o Triângulo de Pascal.

3) Triângulos: (adaptados do Clube de Matemática da OBMEP)

Veja a sequência de triângulos abaixo:



Complete a tabela seguinte:

Lado do triângulo	1	2	3	4
Total de palitos	3	6		

- Qual é o número de palitos necessários para fazer um triângulo com seis palitos de lado?
- Qual deve ser o lado do triângulo em que sejam gastos 54 palitos?
- Qual é o número de palitos necessários para fazer um triângulo com 100 palitos de lado?

Ainda buscando promover a reconciliação integradora, foi proposta a resolução de situações-problema em nível mais alto de complexidade, de forma colaborativa e posterior discussão entre todos, com a mediação da professora. O destaque, neste momento da UEPS, foi a demonstração de satisfação dos estudantes, já à vontade com a metodologia que vinha sendo adotada, discutindo, argumentando, perguntando e respondendo aos colegas. A calculadora sempre à mão, porém, conforme foi possível observar, sendo utilizada somente em momentos adequados. Ainda, pelo fato de ter sido solicitada a apresentação das resoluções, no quadro foi possível observar, pelas discussões que ocorreram, que todos tiveram êxito no final.

A primeira, de uma sequência de losangos, solicita a continuação de um tipo de padrão, que envolve conceitos numéricos e algébricos, como propriedades de polígonos, áreas, perímetros, expressões numéricas, quadrados perfeitos. No enunciado são apresentadas figuras representativas dos três primeiros termos da sequência, permitindo assim que os alunos criem uma imagem mental dos elementos que a constituem. Já para a resolução da questão 2, os estudantes completaram o Triângulo de Pascal, e tiveram dificuldade para descrever as características que encontravam no triângulo construído e completo. Quanto à questão 3, os estudantes resolveram-na e comentaram que o total de palitos de cada triângulo é sempre determinado pelo lado do triângulo multiplicado por 3; compreenderam, também, que, inversamente, o lado do triângulo é igual ao número total de palitos dividido por três.

Sexto Momento: Resolução de situações-problema em forma de desafios

Objetivo: identificar os conhecimentos prévios dos estudantes, a partir da análise de situações-problema envolvendo desafios.

Tempo: duas horas-aula (1h40min)

Atividade: resolução de seis situações-problema em forma de desafios

Dinâmica: os estudantes são orientados a resolverem em quartetos, com o auxílio da calculadora, registrando sempre como pensaram, e após um grupo vai ao quadro resolver a questão para o grande grupo.

Comentários com sugestões para este momento:

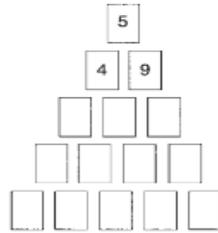
- No sexto momento, é importante levar em conta a reconciliação integradora, objetivando a avaliação somativa.
- Para este encontro, são programadas situações-problema em forma de desafios.
- Cada grupo composto por quatro integrantes recebe um desafio diferente e, após terem debatido e concluído, apresentam, no quadro, ao grande grupo.

ATIVIDADES PROPOSTAS PARA O SEXTO MOMENTO DA UEPS

Em quartetos, resolvam os seguintes problemas em forma de desafios. Tais desafios podem ser resolvidos com a utilização da calculadora. É importante que você procure explicar como pensou, ao resolver cada um dos problemas.

Desafio 1:

Tenho 15 cartas, numeradas consecutivamente de 1 a 15. Quero dispô-las em um triângulo. Escrevi os números das primeiras três como referência. No entanto, não quero uma disposição qualquer. Quero que cada carta seja igual à diferença entre as 2 cartas logo abaixo dela, à esquerda e à direita. Por exemplo, 5 é a diferença entre 4 e 9 (a subtração é sempre calculada de modo que o resultado seja positivo). Perceba que essa condição não se aplica às cartas da última fileira. As primeiras três cartas já estão em seus lugares corretos. Você consegue descobrir o modo de colocar as 12 cartas restantes? Os matemáticos já encontraram “triângulos de diferença” como este com 2, 3 ou 4 fileiras de cartas, usando números inteiros consecutivos a partir do 1. Foi provado que nenhum “triângulo de diferença” poderá ter 6 ou mais fileiras.

**Desafio 2:**

O quadro abaixo mostra o preço em reais das passagens para viagens entre duas das cidades A, B, C, D e E. Note que o preço de ida e o preço de volta entre duas das mesmas cidades podem ser diferentes. Pablo quer sair de uma dessas cidades e visitar todas as demais, gastando o mínimo possível. Quanto Pablo irá gastar?

	A	B	C	D	E
A		3	1	2	5
B	2		2	1	4
C	1	3		2	1
D	2	5	4		3
E	5	2	1	4	

Desafio 3:

Colocar exatamente três símbolos matemáticos entre os algarismos abaixo, de modo que o resultado seja 100. Se quiser você pode repetir o mesmo símbolo, mas cada repetição conta no seu limite de três. Não é permitido reorganizar os números.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Desafio 4:

Joana foi comprar 20 canetas e comparou os preços em duas lojas: na loja A, cada caneta custa 3 reais, mas há uma promoção de cinco canetas pelo preço de quatro, e na loja B, cada caneta custa 4 reais, mas a cada cinco canetas compradas, como brinde ela pode levar até mais duas de graça. Tentando fazer a melhor escolha entre comprar somente na loja A ou somente na loja B, quanto ela pode economizar?

- (A) nada (B) R\$ 6,00 (C) R\$ 8,00 (D) R\$ 10,00 (E) R\$ 12,00

Desafio 5:**Festa de família**

- Foi uma ótima festa – diz Lúcia à sua amiga Edite.
- Quem estava lá?
- Bem, tinha um avô, uma avó, dois pais, duas mães, quatro filhos (dois homens, duas mulheres), três netos, um irmão, duas irmãs, um sogro, uma sogra, uma nora.
- Nossa! 23 pessoas!
- Não! Era menos que isso. Muito menos!

Qual é o menor número possível de pessoas na festa, que seja consistente com a descrição de Lúcia?

Desafio 6:

Dado um quadrado, formado por 25 quadradinhos, pede-se que o mesmo seja completado com os números de 1 a 25, sem repeti-los, de tal forma que a soma dos números de cada linha, coluna e diagonal seja igual a 65.

17		1		
23				16
	6			
			21	
				9

Para este momento foi planejada a resolução de uma situação-problema, na forma de desafio, para cada grupo de quatro estudantes. Novamente foi possível observar a disposição dos estudantes ao comentarem sobre determinados problemas resolvidos, além de mencionar o que haviam aprendido quanto ao uso da calculadora. Com efeito, foi possível observar que alguns pouco tinham feito uso de tal recurso, e manifestando satisfação por terem aprendido a utilizá-la. Para o primeiro e o sexto desafios, foi necessária a ajuda dos colegas e da professora, já que os grupos demonstraram dificuldade. O grupo que resolveu o segundo desafio não utilizou a calculadora, porém o entendimento da questão e sua interpretação é que foram os dados mais significativos desse desafio. A resolução do terceiro desafio ocorreu a partir da metodologia de tentativa e erro, com o auxílio da calculadora. O desafio quatro solicitava aos estudantes que analisassem duas lojas que vendiam canetas com valores diferenciados, numa promoção. Este grupo, além do raciocínio lógico, utilizou bastante a calculadora, a fim de obter os gastos em cada loja. O grupo que apresentou o desafio 5 utilizou o desenho, entendendo que, dessa maneira, seria mais fácil identificar a quantidade de pessoas que tinha na festa. Para a resolução do sexto desafio, os integrantes do grupo, depois de terem realizado diversas tentativas sem êxito, solicitaram a ajuda dos demais colegas e da professora, porque, por meio da tentativa e erro, não haviam conseguido resolvê-lo. Em alguns casos apenas uma linha ou uma coluna não chegava ao resultado necessário, fazendo com que toda a atividade tivesse que ser recomeçada. Para este desafio, tanto o grupo como os demais colegas utilizaram com frequência a calculadora para chegarem ao resultado correto. Nesse encontro, todos os desafios foram compreendidos, uma vez que cada um dos grupos atendeu à solicitação de explicar aos colegas como procedeu para a sua resolução.

Sétimo Momento: Avaliação Final ou Somativa

Objetivo: aplicação da Avaliação Somativa, a fim de buscar evidências da ocorrência de aprendizagem significativa.

Tempo: duas horas-aulas (1h40min)

Atividade: resolução de dez situações-problema

Dinâmica: os estudantes são orientados a propor soluções, individualmente, com o auxílio da calculadora, registrando sempre como pensaram, a fim de chegar a cada uma das respostas.

Comentários com sugestões para este momento:

- Com o objetivo de buscar evidências sobre o conhecimento construído pelos estudantes ao longo da aplicação da UEPS, deve ser realizada uma avaliação somativa. Para tanto, são apresentadas dez situações-problema para serem resolvidas pelos estudantes, individualmente.
- Segundo Moreira (2011), avaliação somativa é aquela que busca avaliar o alcance de determinados objetivos de aprendizagem, no final de uma fase de aprendizagem.
- Neste caso, busca-se avaliar o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas, com a utilização da calculadora, conforme o planejamento realizado.
- O(a) professor(a) destaca a importância de que todos procurem registrar como pensaram, ao resolver cada um dos problemas. As resoluções são entregues para serem analisadas.

Para o sétimo momento da UEPS foi organizada a Avaliação Final. A escolha das situações-problema baseou-se no estudo realizado até então e, também, nas questões da Avaliação Diagnóstica, com base nas quais foi possível a identificação de conhecimentos prévios dos estudantes. A avaliação final constou de algumas das questões da avaliação diagnóstica, além de questões trabalhadas em outros encontros, procurando-se modificar os contextos.

ATIVIDADES PROPOSTAS PARA O SÉTIMO MOMENTO DA UEP

Resolva os seguintes problemas envolvendo o Conjunto dos Números Reais. O objetivo desta atividade é verificar o seu grau de compreensão deste conteúdo, com base no que estudamos nos encontros anteriores.

Utilize a calculadora conforme seu interesse ou sua necessidade. É importante que você procure explicar como pensou, ao resolver cada um dos problemas, inclusive informando ao utilizar a calculadora, quando for o caso.

1) Utilize a calculadora para realizar as seguintes multiplicações por 202:

a)

✓ $21 \times 202 = \underline{\hspace{2cm}}$

✓ $48 \times 202 = \underline{\hspace{2cm}}$

✓ $35 \times 202 = \underline{\hspace{2cm}}$

✓ $17 \times 202 = \underline{\hspace{2cm}}$

b) Descreva o padrão observado. _____

2) Uma turma do Ensino Médio, com o objetivo de arrecadar dinheiro para sua formatura, irá organizar um bar na escola. Para tanto, os estudantes da turma solicitaram, na secretaria, a troca de R\$ 300,00 em moedas, a fim de facilitar o troco.

a) Cite três possibilidades de trocas se, na secretaria da escola estivessem à disposição moedas, em número suficiente, de R\$ 0,25, R\$ 0,50 e R\$ 1,00.

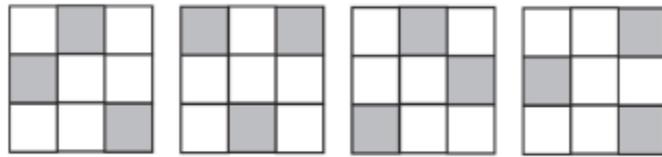
b) Determine o número máximo e o número mínimo de moedas utilizadas, se os estudantes fossem em um banco que possui moedas, em número suficiente, de R\$ 0,01, R\$ 0,05, R\$ 0,10, R\$ 0,25, R\$ 0,50 e R\$ 1,00.

Número Máximo: _____

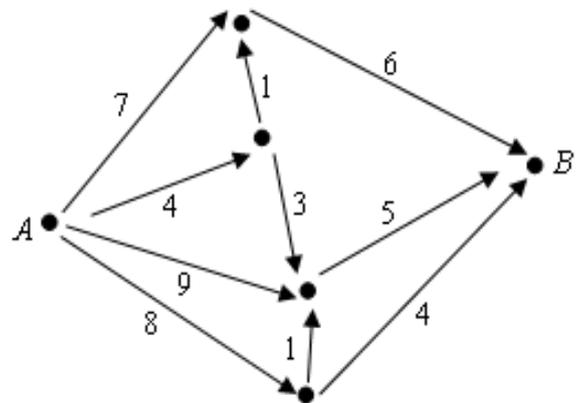
Número Mínimo: _____

c) Determine uma possibilidade envolvendo todas as moedas existentes no banco, conforme o item (b).

3) Observe a sequência de figuras desenhadas e desenhe, ao lado, a próxima figura. Explique como pensou.



4) (Adaptado de OBM, 2011) A figura ao lado representa um mapa de estradas. Os números escritos nas setas indicam quanto de pedágio um viajante deve pagar ao passar pela estrada. Todas as estradas são de mão única, como indicam as setas. Qual o valor mínimo de pedágio pago por um viajante que sai da cidade A e chega na cidade B?



5) Observe o quadro.

Suponha que as linhas das colunas A e B prossigam sendo formadas pela mesma lógica usada até então, que é:

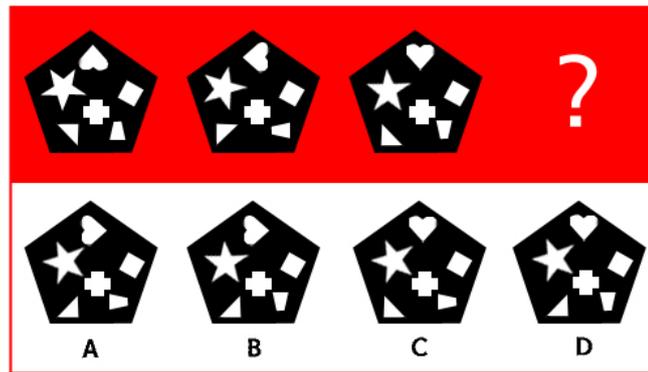
* o triplo do elemento anterior para os elementos da coluna A, a partir do número 1, arbitrariamente escolhido;

* e a metade do elemento anterior para os elementos da coluna B, a partir do número 1000, arbitrariamente escolhido.

A	B
1	1000
3	500
9	250

Determine os elementos que pertencem à 10ª linha.

6) Alguém separou um monte de retalhos em quatro grupos e os arrumou de acordo com uma sequência lógica. Qual dos grupos da segunda fila completa corretamente a sequência da primeira fila? Explique ao lado.



7) Um estudante numerou todas as casas do tabuleiro quadrado abaixo, da esquerda para a direita e de cima para baixo, começando com o número 1. A casa central recebeu o número 5. Se ele fizer o mesmo com outro tabuleiro quadrado com 49 casas, qual número será escrito em sua casa central?

3	2	1
6	5	4
9	8	7

8) Manuel, Antônio e Joaquim começam a pintar, no mesmo instante, três muros iguais de 60 metros de comprimento, um muro para cada um. Nos 10 primeiros minutos de trabalho, Manuel pinta 2 metros, Antônio 3 metros e Joaquim, 5 metros. Quem termina a sua parte, imediatamente passa a ajudar os outros, até que os três juntos terminem todo o trabalho, cada um mantendo o seu ritmo até o final. Quanto tempo levou para o trabalho ser feito?

9) (OBM, 2014) Em uma calculadora muito simples, não é possível digitar dois dígitos sem apertar algumas operações *mais*, *menos*, *vezes* ou *dividido* entre as apertadas dos dígitos. Também não é possível apertar duas operações seguidas. Ao apertar o dígito, a calculadora faz a operação imediatamente. A calculadora começa com o 0 no visor, e a primeira apertada tem que ser uma operação. Ou seja, primeiro se aperta uma operação, depois um dígito, depois uma operação e assim por diante. Por exemplo, um jeito de aparecer 29 no visor é apertar + e depois 7, fazendo aparecer $0 + 7 = 7$ no visor; em seguida apertar x e 5, passando a ter $7 \times 5 = 35$ no visor, e concluir apertando - e 6 tendo como resultado $35 - 6 = 29$. Assim é possível obter 29 com seis apertadas de botão. Pedro quer que apareça o número 100 no visor.

Qual o número mínimo de apertadas, contando operações e dígitos que Pedro tem que fazer na calculadora?

- e) 10 d) 8 c) 6 b) 4 a) 2

10) Em uma cidade operam dois estacionamentos de carros. O estacionamento A cobra R\$ 10,00 pela primeira hora e R\$ 4,00 por hora adicional. O estacionamento B cobra apenas R\$12,00 por hora. Determine o valor a ser pago por um motorista, se demorar duas horas utilizando o estacionamento A? E se utilizar o estacionamento B?

Na análise das dificuldades apresentadas, em sua maioria, não somente na avaliação final, confirmou-se a principal dificuldade como sendo de interpretação das situações-problema por parte dos estudantes. Entretanto é possível dizer que houve crescimento nesses termos, tendo demonstrado compreender possibilidades para o desenvolvimento do raciocínio lógico, com base na leitura e discussão de situações-problema, cujas resoluções, aos poucos, passaram a ser apresentadas de forma oral, explicando aos colegas, e não apenas por meio de cálculos com resultados de operações. Além disso, no que se refere à utilização da calculadora, houve uma conscientização, com base, também, em análises de resultados, realizadas conjuntamente, durante as discussões. Isto foi promovido, considerando conclusões que os estudantes faziam, de forma precipitada, quanto aos valores obtidos quando utilizavam a calculadora. A partir dos dados analisados, pôde-se perceber que a calculadora não é um recurso que, por si só, melhore as condições de aprendizagem dos estudantes. De fato, para que isso ocorra é preciso proporcionar momentos e oportunidades diferenciadas. Espera-se que as que foram vivenciadas por meio desta UEPS planejada, apresentada e analisada, sirvam como material a ser utilizado, adequado e aperfeiçoado por colegas professores, não somente de Matemática, mas de outras áreas do conhecimento.

REFERÊNCIAS

- AUSUBEL, David. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva.** Lisboa: Plátano, 2003.
- BARBOSA, Ana Cristina Coelho. **A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico.** 2009. Tese (Doutorado em Estudos da Criança) – Instituto de Estudos da Criança, Universidade do Minho, Portugal, 2009.
- CURY, Helena Noronha. **Erros na aprendizagem de matemática: relatos de pesquisas e reflexões.** Santa Maria: Centro Universitário Franciscano, 2016.
- IEZZI, Gelson. **Matemática e realidade: 8ª série.** 5. ed. São Paulo: Atual, 2005.
- MOREIRA, Marco Antonio. **Potentially meaningful teaching units – PMTU.** Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS, 2011.
- MOREIRA, Marco Antonio; MASINI, Elcie Fortes Salzano. **Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel.** São Paulo: Centauro, 2006.
- PONTE, João Pedro et al. **Didáctica da Matemática.** Lisboa: Departamento do Ensino Secundário, Ministérios da Educação, 1997.
- VALE, Isabel et al. **Matemática no 1º Ciclo: propostas para a sala de aula.** Viana do Castelo: Escola Superior, 2007.
- VALE, Isabel. As tarefas de padrões na aula de matemática: um desafio para professores e alunos. **Interacções**, v. 8, n. 20, 2012.
- VASCONCELLOS, Celso dos Santos. **Avaliação: concepção dialética-libertadora do processo de avaliação escolar.** 13. ed. São Paulo: Libertad, 2001.